INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO
MATEMÁTICAS BÁSICAS

ÁLGEBRA

TALLER DE EJERCICIOS PREVIOS A FACTORIZACIÓN

Adaptado por Carlos Villa

PRESENTACIÓN

El presente taller, está dedicado a la parte inicial del Álgebra, segundo eje temático del curso de Matemáticas Básicas. En él, el estudiante encontrará los conceptos básicos que le permitirán generalizar la aritmética, por ello es fundamental el saber previo de los conjuntos numéricos para alcanzar un nivel de abstracción que permita comprender el lenguaje del Álgebra y resolver problemas en contexto.
El mapa conceptual que se presenta, da cuenta no sólo de la red conceptual que se teje en todo el eje temático, sino de las operaciones de las expresiones algebraicas, objeto fundamental en el estudio del álgebra. Es conveniente y necesario que el estudiante no sólo dedique un poco de su tiempo a leerlo y analizarlo, sino también que al final del eje trate de construir su propio mapa conceptual.
Este cuadernillo lo conforman dos bloques el primero: indagación de los saberes previos, en este caso se cuestiona a cerca de los conocimientos adquiridos en Aritmética.
En el segundo se encuentran gran variedad de ejercicios y problemas de los cuales en su mayoría se han incluido las respuestas como una manera de que el estudiante pueda verificar su trabajo.

COMPETENCIAS:

Utilizar adecuadamente las expresiones algebraicas, sus propiedades básicas y operaciones para resolver situaciones problema en distintos contextos

RED DE CONCEPTOS:

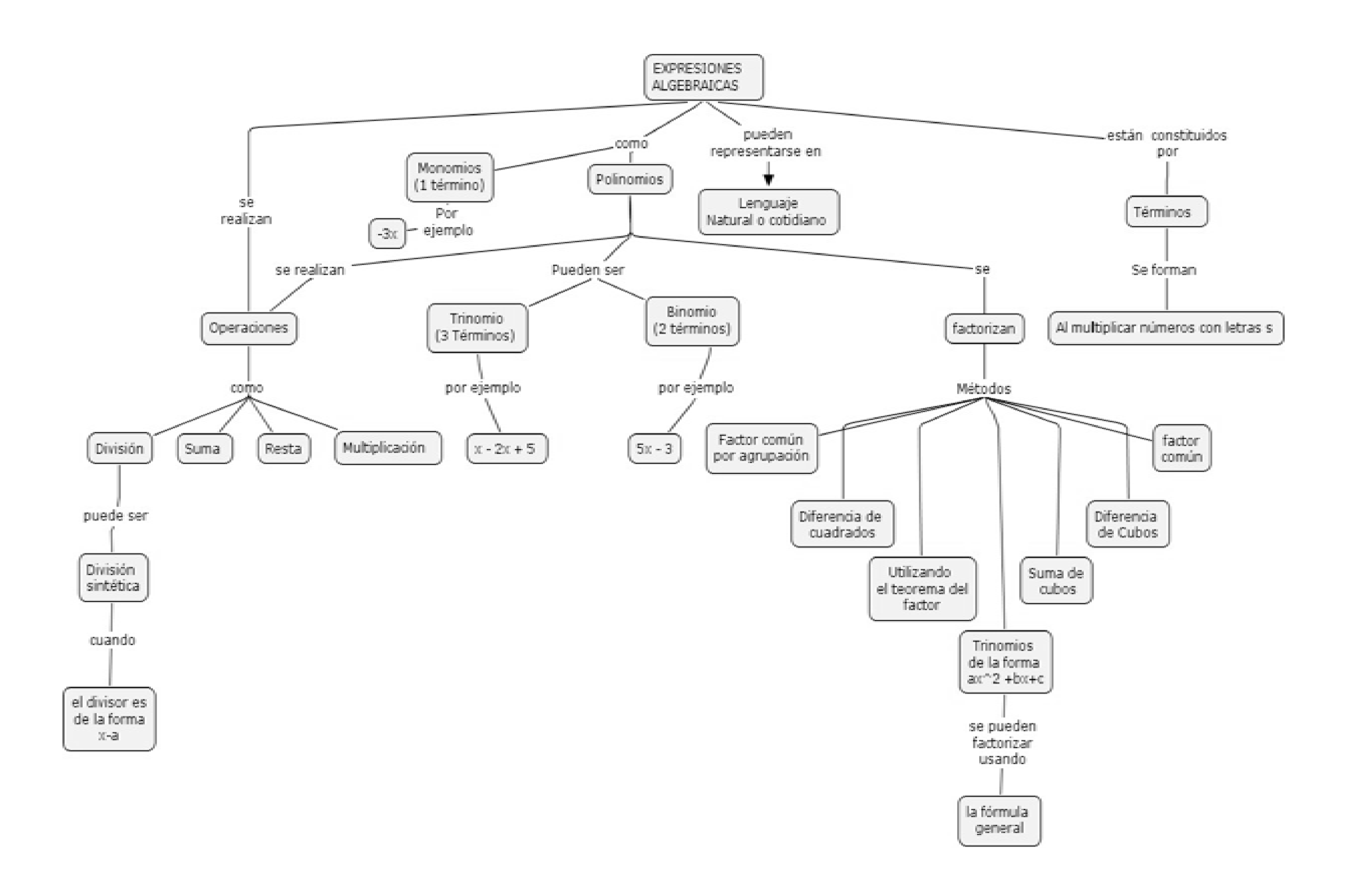
Expresiones algebraicas y polinomios.
Operaciones con polinomios: Suma, resta, multiplicación y división.

INDICADORES DE LOGROS:

Resuelve expresiones algebraicas utilizando las propiedades y operaciones algebraicas.

En una situación específica:

- **Realiza** operaciones con polinomios.
- **Plantea** la o las expresiones algebraicas que representan la situación.
- **Resuelve** la situación a partir de la o las expresiones algebraicas que la representan, utilizando las propiedades, operaciones y/o métodos desarrollados.


EXPRESIONES ALGEBRAICAS
como
pueden representarse en
están constituidos por
se realizan
Monomios (1 término)
Polinomios
Lenguaje Natural o cotidiano
Términos
Por ejemplo
-3x
se realizan
Pueden ser
se
Se forman
Operaciones
Trinomio (3 Términos)
Binomio (2 términos)
factorizan
Al multiplicar números con letras s
como
por ejemplo
por ejemplo
Métodos
División
Suma
Resta
Multiplicación
x - 2x + 5
5x - 3
Factor común por agrupación
factor común
puede ser
Diferencia de cuadrados
Diferencia de Cubos
División sintética
Utilizando el teorema del factor
Suma de cubos
cuando
Trinomios de la forma ax^2 +bx+c
se pueden factorizar usando
el divisor es de la forma x-a
la fórmula general

INDAGACIÓN DE SABERES PREVIOS DE ARITEMTICA

Las siguientes actividades tienen como fin hacer un reconocimiento de pertenencia y clasificación de números a uno o varios conjuntos numéricos. Las respuestas deben ser puestas en discusión por todos los integrantes del grupo (estudiante-docente)

1. Juan realiza una encuesta sobre la cantidad de familias, en un barrio de Medellín, que tienen entre uno y cuatro hijos. Los resultados obtenidos se dan en la siguiente tabla.

# de hijos	1	2	3	4
# de familias	115	205	305	80

Los números escritos en la tabla, pertenecen al conjunto numérico de los _________

2. En una empresa productora de hielo, se hace un registro cada hora de la temperatura en grados centígrados de los congeladores, con el fin de mantener el producto en buen estado.
   Las mediciones de temperatura que se hicieron un día son las siguientes:
   3ºC, --1ºC, - 4ºC, 0ºC, -12ºC, - 2ºC,-15ºC.
   Los números registrados en ese día, que determinan la temperatura de los congeladores, pertenecen al conjunto de los números ______________

3. En un laboratorio de física se realizo una práctica sobre medición de longitud. Los estudiantes midieron cinco varillas y obtuvieron los siguientes resultados: 3 m, ½ m, 2,53 m y 0.85 m. Los números obtenidos pertenecen al conjunto numérico de los ___________

4. El peso de los estudiantes del ITM puede ser cualquier número entre 45 y 90 kg. Si cinco estudiantes del ITM son pesados. Los números que señala la pesa pertenecen al conjunto numérico de los ____________

Las siguientes actividades se realizan con el fin de trabajar el concepto de inclusión entre conjuntos numéricos. Las respuestas deben ser puestas en discusión por todos los integrantes del grupo (estudiante-docente)

3. El conjunto numérico de los Naturales es: **N** ={1, 2,3, 4 . . .}
   El conjunto numérico de los Enteros es: **Z=** {. . . –4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,. . .}
   ¿Cuál de los dos conjuntos contiene todos los elementos del otro conjunto? ______________

6. El conjunto numérico de los Racionales (**Q**) esta formado por los números que se puedan escribir de la forma p/q, donde p y q son números enteros y $q \neq 0$. ¿Es posible escribir cualquier número natural o entero de esta forma? ______. Escribe 10 números de esta forma.

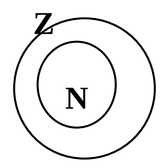
7. Responde falso o verdadero a cada una de las siguientes preguntas. Da un ejemplo de cada afirmación.
   a. Los números naturales son números enteros
   b. Los números enteros son números naturales

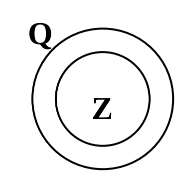
a. Algunos números enteros son Naturales
b. Todos los enteros son racionales
c. Algunos racionales son enteros
d. Los números decimales son racionales
e. Los números racionales son enteros
f. Los números fraccionarios son naturales

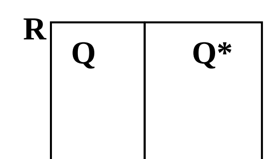
8. Escribe al menos, cinco números que cumpla las siguientes condiciones.

a. Racional, entero y natural
b. Racional, entero y no natural
c. Racional, no entero y no natural
d. Racional, negativo, entero, no natural
e. Real, racional, entero, natural
f. Real, racional, entero, no natural
g. Real, racional, no entero
h. Real, racional, negativo y real
i. Real, racional positivo, no entero
j. Real, racional negativo, no entero
k. Real, irracional, negativo
l. Real, irracional, positivo

9. Los siguientes diagramas representan la inclusión de un conjunto numérico en otro conjunto numérico.







Con base en estos diagramas, elabora un diagrama que ilustre, la siguiente información:

A. El conjunto numérico de los racionales contiene los conjuntos numéricos de los naturales y los enteros.
B. El conjunto numérico de los reales contiene los conjuntos numéricos de los naturales, enteros, racionales, irracionales.

Realiza las siguientes operaciones

1. $2-3[4(2-5)]=$
2. $\frac{2}{3}+\frac{3^2}{4}\left(5+\frac{8}{13}\right)+3$
3. $\frac{2}{3}-4\left\{-\left[2+4\left(3-\frac{1}{2}\right)\right]+15\right\}-10=$
4. $\frac{2}{3}\left(\frac{2}{7}\div 5\left(\sqrt{\frac{16}{9}}+1\right)\right)=$
5. $2\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{2}+\frac{1}{5}\sqrt{2}=$

ALGEBRA

PROBLEMAS Y EJERCICIOS.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y OPERACIONES

1. Pasar del lenguaje natural al lenguaje matemático.

Operaciones simples.

- Un número aumentado en 5.
- Un número disminuido en 19
- Un número disminuido en 13
- Tres veces un número
- The triple of a number
- La mitad de un número
- El 5 aumentado en un número
- El 8 divido por un número
- Un número multiplicado por el mismo
- The product between two numbers
- Un número sumado con el mismo
- The sum of two numbers
- La división de dos números
- El cociente entre dos números
- La razón entre dos números
- The square of a number
- La raíz cúbica de un número
- El 10% de un número

Combinación operaciones

- Three times the number increased in five units.
- Tres veces un número disminuido en 8.
- El cuádruplo de un número por su doble.
- Four times the number by the double of another number.
- The square of the sum of two numbers.
- La suma de los cuadrados de dos números.
- La suma de dos números al cuadrado.
- El promedio de tres números
- El doble de un número aumentado en 5 es 10.
- Tres veces un número disminuido en 8 da 10.
- El cuádruplo de un número por su doble es 32.
- El cuádruplo de un número por el doble de otro número equivale a 12.
- El cuadrado de la suma de dos números.
- El promedio de tres números tiene como resultado 11.
- La suma de tres números de tres números consecutivos
- El promedio de cuatro números consecutivos pares.
- La diferencia de dos números impares consecutivos es 5. (Analiza la solución, si la tiene)

Operaciones en contextos

Traduzca al lenguaje algebraico y si es posible de la solución.

- La edad actual de Juan aumentada en 18 años es 50.
- Las edades de Pedro y Juan suman 35 años.
- El triple de la edad de Jorge y el doble de la edad de Yolanda es 205.

- Sergio compró dos pantalones y una camisa por $160.000 y Hernando compro en el mismo almacén un pantalón y una camisa por $100.000 (hallar el valor de la camisa).

- José compró tres manzanas y tres peras por $ 6.600 y tres manzanas y 10 peras por $15.200. Cuánto valen las 13 peras?

2. Pasar del lenguaje algebraico al lenguaje natural

- 3p
- 2x + y
- x – 2y
- 3 + 5
- 3^2
- $\frac{8x}{5}$
- xy
- $(a+b)^2$
- 4x + 2x

3. Conceptos básicos

a. ¿Cuál de las siguientes expresiones es un trinomio con potencias descendentes de grado 6?

- $5x^6 - 4x^5 + 12$
- $6x^5 - x^6 + 4$
- $2x + 4x^2 - x^6$
- $4x^6 - 6x^4 + 9x + 1$

b. Proporcione un ejemplo de un polinomio con cuatro términos se variable x, de grado 5, escrito en potencias descendentes, sin término de cuarto grado.

c. El exponente de 6^3 es 3. Explique por qué el grado de 6^3 no es 3. ¿Cuál es su grado?

4. Operaciones algebraicas

a. Identifica los términos semejantes y súmalos.

$3x, 2a, 4x^3, 5xy, 3(a+b), 2x, 3y, 2a, 4x^2, -3a, 5x^{-3},$

$\frac{2xy}{5}, -5(a+b), 2x, \frac{3}{5}x^3, 4y^2, 3xmn, a, 4x^3, 5x^2y, \quad 3x, 2ab$

$3xy, -2a, 4x^{-3}, 8xy^2, 2xmn, 2xy^{-1}, \frac{6x}{y},$

b. Realiza las siguientes operaciones

- $6a + 3a$
- $5m + 4m$
- $b - 4b$
- $2p + (-3p)$
- $7 + 8r - 2$
- $7c - 2c - 3d$
- $9x - 5y + 6y - 3x$
- $-8z + 5w - 4z - 3w + 2$
- $-2p + 6q - 3 + 4p - 5 + 3q$
- $2 \times 3a$
- $(-5d) \times (-6)$
- $3m \times 5n$
- $(-6p) \times (-2q)$
- $5r \times (-4t)$

- $4u \times 3y \times (-2z)$
- $(-3u) \times 2v \times (-2z)$
- $27a \div 3$
- $4m + 2 \times 3m$
- $5p - 4 \times 6p$
- $4r + 3r \times 2s$
- $8u - 2n \times 3u$
- $3xy + 2y \times 5x$
- $8z + \frac{16z}{-4}$
- $8w - \frac{4w}{2}$
- $-12a - 18a \div (-3)$
- $4b \times 3 + 12b \div 4$
- $8c \times (-2) + \frac{100c}{10}$
- $5m + 2n - (3m - n)$
- $3a^4 - 5a^4 - \left(8a^4 - \frac{1}{2}a^4\right)$
- $abx^2 - 9abx^2 + \frac{4}{3}abx^2$
- $\frac{3}{2}at^2 + 7x^2y - \frac{1}{2}at^2 - 6x^2y$
- $12gt^2 + \frac{1}{4}g^2t$

c. Dados los polinomios

$P(x) = -2x^4 + 5^2x^3 - 2x + 4;$

$Q(x) = x^3 - 2x^2 + 10x - 1$

$R(x) = x^4 + \frac{2}{5}x^2 - \frac{4}{3}x$

Hallar:

P(x) + Q(x) =

P(x) - Q(x) =

P(x) - 2Q(x) - R(x) =

- P(x) + Q(x)- R(x) =

- P(x) + Q(x)-2 R(x) =

$\frac{1}{2}$ [P(x) + Q(x)]+ R(x) =

d. Encontrar el polinomio P(x) que al sumarlo con el polinomio $Q(x) = x^2 + 3x$
Da como resultado el polinomio $R(x) = 3x^3 - 2x + 5$

e. ¿Cuál es el polinomio que se le debe restar al polinomio $P(x) = -3x^2 + 5x - 10$
Para obtener como resultado el polinomio $2x^3 + 2x - 5$?

5. Potenciación y Radicación

a. Utilice las reglas de la potenciación para simplificar las siguientes expresiones

- $x^{12}.x^4$
- $x^{-6}.x^{-1}$
- $y^3.y^{-12}$
- $\frac{y^{12}}{y^4}$
- $\frac{z^2}{z^7}$
- $\frac{y^5}{y^{-2}}$
- $\frac{x^{-4}}{x^{-3}}$
- $\frac{z^{-1}}{z}$
- $(3x)^2$
- $(-2x^{-2})^2$
- $7k^2.(-2k).(4k^{-5})^3$
- $\frac{z^{-4}z^{-2}}{z^3z^{-1}}$

b. Escribir las siguientes expresiones en forma de radical

- $(3x^2y^3)^{7/5}$
- $(-z)^{2/3}$
-
- $(x+y)^{5/3}$
- $(2xy)^{-3/5}$

c. Los ejercicios siguientes expresarlos con exponente fraccionario y simplificar cuando sea posible usando las reglas de la potenciación

- $\sqrt{9n^2}$
- $-\sqrt[5]{a^5}b^{10}$
- $\sqrt[3]{(x+y)}^3$
- $\sqrt[3]{\frac{(a+b)^4}{(a+b)}}$

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE POLINOMIOS

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Multiplicación de monomios. Realiza las siguientes multiplicaciones entre monomios

a) $2x.(5x^3y) =$

b) $4x^2y^5.\left(-3x^2y^3\right)=$
c) $\left(-7x^4yz^3\right)\left(y^2z\right)=$
d) $\left(-3x^6\right)\left(-4x^2y^3\right)=$

Multiplicación de un polinomio por un monomio. Realiza las siguientes multiplicaciones

a) $2a-3b+4c-\text{ por }-\frac{3}{2}a$ R/ $-3a^2+\frac{9}{2}ab-6ac$

b) $3x-2y-4-\text{ por }-\frac{5}{6}x$ R/ $-\frac{5}{2}x^2+\frac{5}{3}xy+\frac{10}{3}x$

c) $\frac{2}{3}a-\frac{1}{6}b-c-\text{ por }\frac{3}{8}ax$ R/ $\frac{1}{4}a^2x-\frac{1}{16}abx-\frac{3}{8}acx$

d) $\frac{6}{7}a^2x^2-\frac{3}{2}ax^3-\text{ por }-\frac{7}{3}a^3x$ R/ $-2a^5x^3+\frac{7}{2}a^4x^4$

e) $-\frac{5}{3}a^2x^2-\text{ por }-\frac{3}{2}a^2+ax-\frac{3}{5}x^2$ R/ $\frac{5}{2}a^2x^2-\frac{5}{3}a^3x^3+a^2x^4$

3. Multiplicación e un polinomio por un polinomio

a) $a+b+c$ por $a+b-c$ R/ $a^2+2ab+b^2-c^2$

b) a^2-ab+b^2 por a^2+ab+b^2 R/ $a^4+a^2b^2+b^4$

c) x^3-2x^2+8 por $x+2$ R/ $x^4-4x^2+8x+16$

d) x^2+xy+y^2 por $x-y$ R/ x^3-y^3

e) $16a^2+12ab+9b^2$ por $4a-3b$ R/ $64a^3-27b^3$

f) x^2+x-2 por x^2+x-6 R/ $x^4+2x^3-7x^2-8x+12$

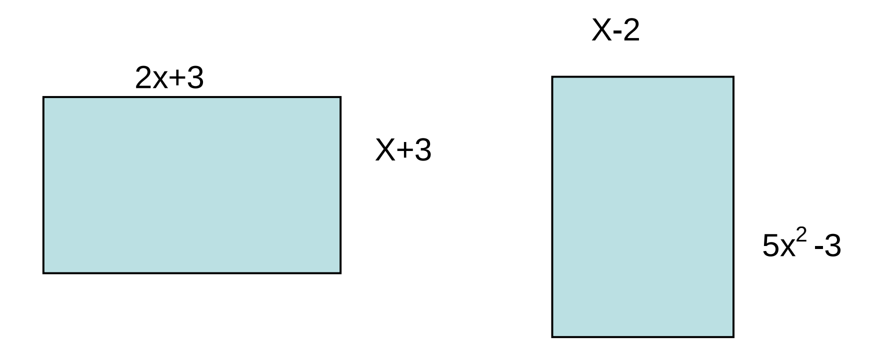
g) $-a^5+a^4b-a^3b^2$ por $-a-b$
R/ $a^6+a^3b^3$

h) $a^3+2a^2b+2ab^2$ por $a^2-2ab+2b^2$
R/ a^5+4ab^4

i) $x^2-3xy-y^2$ por $-x^2+xy+y^2$
R/ $-x^4+4x^3y+x^2y^2-4xy^3-y^4$

j) $x^2-2xy+y^2$ por $x^2+2xy+y^2$
R/ $x^4-2x^2y^2+y^4$

4. El área de un rectángulo se obtiene al aplicar la fórmula ***lado x lado.***
Hallar el área de cada uno de los siguientes rectángulos, cuyos lados están expresados por polinomios.



.

5. Dados los siguientes polinomios:

$P(x) = x^2$

$Q(x) = 3x - x^2$

$R(x) = x^2 - x - 1$

Hallar

a) $P(x).Q(x)$

b) $Q(x).R(x)$

c) $-P(x).R(x)$

d) $P(x)^2.[-Q(x)]$

e) $P(x)^2.[-Q(x) + R(x)]$

6. Productos notables

Efectuar utilizando la regla apropiada en cada caso.

a) $(x-1)\,(x+2)$ R/ X^2+X-2

b) $\left(2x^3+1\right)\left(x^3-7\right)$ R/ $2x^6-13x^3-7$

c) $(5x-7)\,(2x+8)$ R/ $10x^2+26x-56$

d) $(1+5b)^2$ R/ $1+10b+25b^2$

e) $(2c-4)^2$ R/ $4c^2-16c+16$

f) $(2x-3)^3$ R/ $8x^3-36x^2+54x-27$

g) $\left(x^2y^3+2\right)^3$ R/ $x^6y^9+6x^4y^6+12x^2y^3+8$

h) $(x-y)\left(x^2+2xy+y^2\right)$ R/ $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

i) $(a-3)\left(a^2+3a+9\right)$ R/ a^3-27

j) $(9+y)\left(81-9y+y^2\right)$ R/ $729+y^3$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

División entre monomios

a) $3X^3$ por x^2 R/ $3x$

b) $27x^4$ por $-9x^3$ R/ $-3x$

c) $-35x^6$ por $7x^3$ R/ $-5x^3$

d) abx^2 por $-ax$ R/ $-bx$

e) x^3y^3 por x^2y R/ xy^2

División de un polinomio por un monomio

a) $15x^5-25x^4$ por $-5x^3$ R/ $-3x^2+5x$

b) $27x^6-36x^5$ por $9x^5$ R/ $3x-4$

c) $a^2-ab-ac$ por $-a$ R/ $-a+b+c$

d) $-3a^2+\frac{9}{2}ab-6ac$ por $-\frac{3}{2}a$ R/ $2a-3b+4c$

e) $-\frac{5}{2}x^2+\frac{5}{3}xy+\frac{10}{3}x$ *por* $-\frac{5}{6}x$ R/ $3x-2y-4$

División entre polinomios

a) x^2+3x+2 *por* $x+1$ R/ $x+2$

b) $12a^2-7ax-12x^2$ *por* $3a-4x$ R/ $4a+3x$

c) $2a^3+10-16a-39a^2+15a^4$ *por* $2-4a-5a^2$ R/ $5+2a-3a^2$

d) $30y+9-71y^3+28y^4-35y^2$ *por* $4y^2-13y+6$
R/ $7y^2+5y-3$ *residuo* $-39y+27$

e) $x^5-2x^4-4x^3+19x^2$ *por* x^3-7x+5
R/ x^2-2x+3 *residuo* $31x-15$

Problemas de división.

1. Encontrar el polinomio que al multiplicarlo por el polinomio x^2+x+9 da como resultado el polinomio x^3-27
2. Encontrar el polinomio que al multiplicarlo por el polinomio $a-b$ da como resultado el polinomio $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

División sintética

Utilice la división sintética para dividir:

a. $2x^3-4x+7$ *por* $x-3$

b. $6x^4+3x^3-2x^2-5x-2$ *por* $x+\frac{1}{2}$

c. $2x^2-x+5$ *por* $x-2$

d. x^3-9x+1 *por* $x+1$

Tomado de Cuadernillo DE TRABAJO ACADÉMIO No. 2 de Algebra diseñado por profesores de Ciencias Básicas